Soluciones a los ejercicios propuestos del Tema 2

2.1. Sea X es la variable "número de crías **vivas** de una hembra de esta especie". X es una variable discreta que toma los valores 1, 2, 3 y 4 con probabilidades respectivas

$$1 : \frac{0.3}{0.9}, \quad 2 : \frac{0.25}{0.9}, \quad 3 : \frac{0.2}{0.9}, \quad 4 : \frac{0.15}{0.9}$$

Dividimos las probabilidades iniciales por 0.9, ya que 0.9 es la probabilidad de que la hembra tenga alguna cría viva (que es $1 - 0.1$, puesto que 0.1 es la probabilidad de que las tenga todas muertas). Ahora se trata de encontrar la esperanza y la desviación (raíz de la variancia) de la variable X:

$$E(X) = 1 \times \frac{0.3}{0.9} + 2 \times \frac{0.25}{0.9} + 3 \times \frac{0.2}{0.9} + 4 \times \frac{0.15}{0.9} = \frac{2}{0.9} = 2.\overset{\frown}{2}\,.$$

La variancia es $\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$, así que hemos de calcular $E(X^2)$:

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{0.3}{0.9} + 2^2 \times \frac{0.25}{0.9} + 3^2 \times \frac{0.2}{0.9} + 4^2 \times \frac{0.15}{0.9} = \frac{5.5}{0.9} = 6.\overset{\frown}{1}\,.$$

Por tanto, $\mathrm{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 6.\overset{\frown}{1} - (2.\overset{\frown}{2})^2 = 1.172839506$ y la desviación es $\sqrt{1.172839506} = 1.082977149$

2.2.(a) $P(X \leq 3) = 0.20 + 0.10 + 0.20 + 0.25 = 0.75$.

2.2.(b) $P(X < 3) = 0.20 + 0.10 + 0.20 = 0.50$.

2.2.(c) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - 0.50 = 0.50$, por b).

2.2.(d) $P(2 \leq X \leq 4) = 0.20 + 0.25 + 0.20 = 0.65$.

2.2.(e) $P(X \leq 1) = 0.20 + 0.10 = 0.30$ (al menos 4 no se usan equivale a que se usa como mucho 1).

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 0 \times 0.20 + 1 \times 0.10 + 2 \times 0.20 + 3 \times 0.25 + 4 \times 0.20 + 5 \times 0.05 = 2.3 \\
\mathrm{var}(X) &= \sigma^2(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2.31\,, \quad \text{puesto que} \\
E(X^2) &= 0^2 \times 0.20 + 1^2 \times 0.10 + 2^2 \times 0.20 + 3^2 \times 0.25 + 4^2 \times 0.20 + 5^2 \times 0.05 \\
&= 7.6\,, \quad \text{así que} \quad \mathrm{var}(X) = 7.6 - 2.3^2 = 2.31\,, \quad \text{y la desviación es} \\
\sigma(X) &= \sqrt{2.31} = 1.519868415
\end{aligned}
$$

2.3. $X =$"número de circuitos defectuosos" tiene distribución Binomial, esto es, $X \sim B(n = 25,\, p = 0.05)$.
2.3.(a) $P(X \le 2) = \binom{25}{0} p^0 (1-p)^{25} + \binom{25}{1} p^1 (1-p)^{24} + \binom{25}{2} p^2 (1-p)^{23} = 0.8728935043$
2.3.(b) $P(X \ge 5) = 1 - P(X \le 4) = 1 - \Big(\binom{25}{0} p^0 (1-p)^{25} + \binom{25}{1} p^1 (1-p)^{24} + \binom{25}{2} p^2 (1-p)^{23} + \binom{25}{3} p^3 (1-p)^{22} + \binom{25}{4} p^4 (1-p)^{21}\Big) = 1 - 0.9928350521 = 0.0071649479$
2.3.(c) $P(1 \le X \le 4) = P(X \le 4) - P(X = 0) = 0.9928350521 - (1-p)^{25} = 0.715445479$ (usando que habíamos calculado $P(X \le 4)$ en el apartado anterior.
2.3.(d) $P(X = 0) = (1-p)^{25} = 0.95^{25} = 0.2773895731$
2.4. Si X es el número de hembras en los 10 delfines escogidos al azar, $X \sim H(N = 43,\, n_1 = 15\,, n = 10)$, así que

$$
P(X = 3) = \frac{\binom{n_1}{3}\binom{N-n_1}{n-3}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{15}{3}\binom{43-15}{10-3}}{\binom{43}{10}} = \frac{\binom{15}{3}\binom{28}{7}}{\binom{43}{10}} \cong 0.28098 \ \text{ y}
$$

$$
P(X \le 0) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{\binom{15}{0}\binom{43-15}{10-0}}{\binom{43}{10}} + \frac{\binom{15}{1}\binom{43-15}{10-1}}{\binom{43}{10}} \cong 0.06088\,.
$$

2.5. Si $X =$"número de ordenadores, de los 10 comprados, que han de ser sustituidos", entonces $X \sim B(n = 10,\, p)$, donde p se ha de calcular. p es la probabilidad de que un ordenador haya de ser sustituido, esto es, se lleve a reparar y no pueda ser reparado. Como es la probabilidad de una intersección, se calcula condicionando:

$$
\begin{aligned}
p &= P(\text{no puede ser reparado/se lleva a reparar})\, P(\text{se lleva a reparar}) \\
&= (1 - 0.60) \times 0.20 = 0.40 \times 0.20 = 0.08
\end{aligned}
$$

La probabilidad que nos piden es

$$P(X=2)=\binom{10}{2}\,0.08^2\,(1-0.08)^8=0.1478070355$$

2.6. El tamaño de la población de enfermos es $N=2921$, de los que hay $n_1=714$ "marcados" (ingresados). Tomamos una muestra de $n=5$ individuos de la población (enfermos). Sea X la variable "número de ingresados (marcados) de entre los 5". Entonces, $X\sim H(N,n_1,n)$ y la probabilidad que nos piden es

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{\binom{714}{0}\binom{2921-714}{5-0}}{\binom{2921}{5}}\cong 1-0.245964=0.754036$$

2.7. Siendo X el número de los gusanos que escapan, $X\sim B(n=3,\,p=0.8)$, la probabilidad que nos piden es

$$P(X\leq 2)=1-P(X=3)=1-\binom{3}{3}\,0.8^3\,(1-0.8)^0=1-0.8^3=0.488$$

2.8.(a) Sea $X=$"número de hijos varones"$\sim B(n=6,\,p=0.5)$. La probabilidad que nos piden es

$$P(X=3)=\binom{6}{3}\,0.5^3\,0.5^3=20\times 0.5^6=0.3125$$

2.8.(b) $P(X\leq 2)=0.5^6\,(1+6+15)=0.34375$
2.8.(c) $P(X\neq 3)=1-P(X=3)=1-0.3125=0.6875$
2.8.(d) $P(X\leq 4)=1-\big(P(X=5)+P(X=6)\big)=1-\big(0.5^6\,(6+1)\big)=1-0.109375=0.890625$
2.8.(e) $E(X)=n\,p=6\times 0.5=3$ es el número esperado de hijos varones, y su desviación es $\sqrt{n\,p\,(1-p)}=\sqrt{6\times 0.5\times 0.5}=\sqrt{1.5}=1.224744871$
2.9. Si $X=$"número de células en un cultivo de $16\,\mu m^2$, se tiene que $X\sim Pois(\lambda)$ con $\lambda=5\times\frac{16}{20}=4$ células/$16\,\mu m^2$. Entonces, en un cultivo de $16\,\mu m^2$ podemos esperar encontrar $\lambda=4$ células. La probabilidad de que no haya ninguna célula es

$$P(X=0)=e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^0}{0!}=e^{-\lambda}=e^{-4}=0.01831563889$$

y la de que haya al menos nueve,

$$P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \frac{\lambda^5}{5!} + \frac{\lambda^6}{6!} + \frac{\lambda^7}{7!} + \frac{\lambda^8}{8!}\right) = 1 - e^{-4} \times 53.43174604 = 1 - 0.9786365657 = 0.0213634343$$

2.10.(a) La probabilidad de blanco en los descendientes directos de la pareja es 1/4, y la de negro es 3/4 (1/4 de negro homocigoto y 1/2 de negro heterocigoto).
2.10.(b) Negro-blanco-negro: $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64} = 0.140625$. Blanco-negro-blanco: $\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64} = 0.046875$ (porque hay independencia en el color de los diferentes descendientes).
2.10.(c) Un blanco y dos negros: $3 \times 0.140625 = 0.421875$ (por la probabilidad encontrada en el apartado anterior, de un blanco y dos negros en una posición concreta, pues hay tres posibles posiciones, ya que el blanco puede ser el primero, el segundo o el tercero, cada una de ellas con la misma probabilidad).
2.11.(a) $X =$"duración a partir de los 400 días"$\sim Exp(\lambda = 0.04)$. Se pide

$$P(X < 25) = 1 - e^{-\lambda \times 25} = 1 - e^{-1} = 0.6321205588$$

2.11.(b) $P(X > 17) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda \times 17}\right) = 0.5066169924$
2.11.(c) $P(20 < X < 60) = 1 - e^{-\lambda \times 60} - \left(1 - e^{-\lambda \times 20}\right) = 0.3586110108$
2.12. $X =$"nivel de mercurio"$\sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 0.25$ y $\sigma = 0.08$. Entonces,

$$P(X < 0.3) = P(Z < \frac{0.3 - 0.25}{0.08}) = P(Z < 0.625), \text{ entre } 0.73273 \text{ y } 0.73565$$

$$P(X > 0.17) = P(Z > \frac{0.17 - 0.25}{0.08}) = P(Z > -1) = 0.84134$$

$$P(0.01 < X < 0.49) = P(\frac{0.01 - 0.25}{0.08} < Z < \frac{0.49 - 0.25}{0.08}) = P(-3 < Z < 3) = 0.99865 - (1 - 0.99865) = 0.9973$$

usando la tabla de la normal.
2.13. $X =$"número de ratas, de las 100, que son hembras"$\sim B(n = 1000, p = 0.5)$. Hemos de calcular $P(X \geq 445)$, así que aproximaremos por la normal, usando la corrección de Yates (se puede hacer pues $n\,p = n\,(1-p) = 500 \geq 5$):

$$P(X \geq 445) = 1 - P(X \leq 444) \cong 1 - P(Z \leq \frac{444 + 0.5 - 500}{\sqrt{250}}) \cong 1 - P(Z \leq -3.51) = P(Z \leq 3.51) = 0.99978$$

usando la tabla de la normal (al estandarizar hemos restado $n\,p = 500$ y hemos dividido por $\sqrt{n\,p\,(1-p)} = \sqrt{250}$).

2.14. $X =$"cantidad de colesterol"$\sim N(\mu, \sigma^2)$, con $\mu = 200$, $\sigma = 20$. Nos piden:

$$\begin{aligned} P(180 < X < 200) &= P(-1 < Z < 0) = 0.84134 - 0.5 = 0.34134 \\ P(X < 150) &= P(Z < -2.5) = 1 - 0.99379 = 0.00621 \\ P(X > 225) &= P(Z > 1.25) = 1 - 0.89435 = 0.10565 \\ P(190 < X < 210) &= P(-0.5 < Z < 0.5) = 0.69146 - (1 - 0.69146) = 0.38292 \end{aligned}$$

usando la tabla de la normal.

2.15. $X =$"concentración de sodio"$\sim N(\mu, \sigma^2)$. Imponemos:

$$\begin{aligned} P(X < 10) &= P(Z < \frac{10-\mu}{\sigma}) = 0.119 \; \big(\Rightarrow \frac{10-\mu}{\sigma} = -1.18 \big) \\ P(10 < X < 50) &= P(\frac{10-\mu}{\sigma} < Z < \frac{50-\mu}{\sigma}) = 0.6359 \\ &\Rightarrow P(Z < \frac{50-\mu}{\sigma}) = 0.119 + 0.6359 = 0.7549 \\ &\big(\Rightarrow \frac{50-\mu}{\sigma} = 0.69 \big) \end{aligned}$$

A partir del sistema lineal de dos ecuaciones

$$\frac{10-\mu}{\sigma} = -1.18\,, \qquad \frac{50-\mu}{\sigma} = 0.69$$

podemos despejar las incógnitas, que son

$$\sigma = \frac{40}{1.87} = 21.39037433 \quad \text{y} \quad \mu = 10 + 1.18\,\sigma = 35.24064171\,.$$

2.16.(**a**) $X =$"cantidad de radiación"$\sim N(\mu, \sigma^2)$ con $\mu = 400$ y $\sigma = 60$. Se busca en primer lugar un nivel de radiación ℓ que cumpla que $P(X > \ell) \leq 0.1$. Estandarizando, tenemos que $P(Z > \frac{\ell-400}{60}) \leq 0.1$, lo que implica $\frac{\ell-400}{60} \geq 1.29$ y, despejando ℓ, $\ell \geq 477.4$.

En segundo lugar se busca un nivel de radiación m que cumpla que $P(X > m) \geq 0.95$. Estandarizando, tenemos $P(Z > \frac{m-400}{60}) \geq 0.95$, lo que implica $\frac{m-400}{60} \leq -1.645$ y, despejando m, $m \leq 301.3$.

2.16.(b) Calculamos en primer lugar

$$P(X > 420) = P(Z > \frac{1}{3}) \cong P(Z > 0.33) = 1 - 0.62930 = 0.37070\,.$$

Sea $Y =$“número de supervivientes de los 10”$\sim B(n = 10, p = 0.3707)$. Entonces,

$$P(Y \geq 5) = 1 - P(Y \leq 4) = 1 - \Big((1-p)^{10} + 10\,p\,(1-p)^9 + \cdots$$
$$+ 210\,p^4\,(1-p)^6\Big) = 1 - 0.7044301838 = 0.2955698162$$

Si ahora $Y =$“número de supervivientes de los 100”$\sim B(n = 100, p = 0.3707)$, la probabilidad que hemos de calcular es $P(Y \geq 50)$, y la calcularemos aproximando la binomial por la normal, usando la corrección de Yates (ya que $n\,p = 37.07 \geq 5$ y $n\,(1-p) = 62.93 \geq 5$) así:

$$P(Y \geq 50) = 1 - P(Y \leq 49) \cong 1 - P(Z \leq \frac{49 + 0.5 - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}})$$
$$\cong 1 - P(Z \leq 2.57) = 1 - 0.99492 = 0.00508$$

2.17.(a) $X =$“tiempo de revelado”$\sim N(u, \sigma^2)$ con $\mu = 25$, $\sigma = 1.5$. Se pide

$$P(X > 26.5) = P(Z > \frac{26.5 - 25}{1.5}) = P(Z > 1) = 1 - 0.84134 = 0.15866$$

2.17.(b) $P(X > 23) \cong P(Z > -1.33) = 0.90824$
2.17.(c) Ahora nos piden calcular $P(|X - 25| > 2.5)$, que estandarizando es

$$P(|Z| > \frac{2.5}{1.5}) \cong P(|Z| > 1.67) = 2 \times (1 - 0.95254) = 0.09492$$

2.18. $X =$“lectura de la temperatura”$\sim N(\mu, \sigma^2)$. Se impone que $P(|X - \mu| \leq 0.1) \geq 0.95$. Estandarizando, $P(|Z| \leq \frac{0.1}{\sigma}) \geq 0.95$, que implica $\frac{0.1}{\sigma} \geq 1.96$ y, despejando, $\sigma \leq \frac{0.1}{1.96} = 0.0510204816$
2.19. $X =$“número de empleados de baja”$\sim B(n = 150,\ p = 0.40)$. Se pide $P(X \geq 53) = 1 - P(X \leq 52) \cong 1 - P(Z \leq \frac{52+0.5-60}{\sqrt{36}}) = P(Z \leq 1.25) = 0.89435$ (aproximando la binomial por la normal, por Yates, y usando que $n\,p = 60$ y $n\,p\,(1-p) = 36$).

2.20. Se considera la variable Z que toma los valores 0 y 1 con probabilidades respectivas $1-p$ y p. Como $g(0) = P(Z=0) = 1-p > 0$, la probabilidad de extinción $\rho_e > 0$. Como $E(Z) = 2\,p \leq 1 \Leftrightarrow p \leq \frac{1}{2}$, tenemos que si $p \leq \frac{1}{2}$, $\rho_e = 1$. Si $\frac{1}{2} < p < 1$, ρ_e es raíz del polinomio $p\,s^2 - s + (1-p) = 0$, y encontrando la única raíz que está en $(0,\,1)$, tenemos que $\rho_e = \frac{1-p}{p}$.
2.21. Es un *"k* $= 2$ *of n* $= 3$ *system"*. Su fiabilidad es

$$\sum_{j=k(=2)}^{n(=3)} \binom{n}{j} R^j\,(1-R)^{n-j} = 3 \times 0.95^2 \times 0.05 + 0.95^3 = 0.99275\,,$$

pues $R = 0.95$ es la fiabilidad de cada componente.
2.22. Fiabilidad del módulo M_1:

$$R_{M_1} = \sum_{j=3}^{5} \binom{5}{j} 0.8^j\,(1-0.8)^{5-j} = 0.94208\,.$$

Fiabilidad del módulo M_2:

$$R_{M_2} = \sum_{j=4}^{8} \binom{8}{j} 0.6^j\,(1-0.6)^{8-j} = 0.8263296\,.$$

Fiabilidad del sistema en serie: $R_{M_1}\,R_{M_2} \cong 0.77847$. Fiabilidad del sistema en paralelo: $1 - (1-R_{M_1})\,(1-R_{M_2}) \cong 0.98994$.
2.23. $X =$"puntuación"$\sim B(n=10, p=\frac{1}{3})$, ya que $X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, siendo Y_i variables Bernouilli de parámetro p, que asignan un 1 si la correspondiente pregunta se ha contestado correctamente y un 0 en caso contrario (y son independientes). Tenemos que $E(X) = n\,p = \frac{10}{3} = 3.\widehat{3}$.

Si ahora las respuestas incorrectas restan x puntos, tenemos que las variables Y_i asignan un 1 si la pregunta se ha contestado correctamente (con probabilidad $\frac{1}{3}$), y un $-x$ en caso contrario. Entonces,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{10} E(Y_i) = 10\left(1 \times \frac{1}{3} + (-x) \times \frac{2}{3}\right) = \frac{10}{3}\,(1-2\,x)$$

Si queremos que esta esperanza sea igual a 2, despejando de $\frac{10}{3}\,(1-2\,x) = 2$ obtenemos $x = 0.2$, que son los puntos que han de restar las respuestas

incorrectas. Si queremos que sea 0, despejando de $\frac{10}{3}(1-2x)=0$ tenemos $x=0.5$ puntos.
2.24.(a) $X=$"número de semillas que no germinan en un paquete"$\sim B(n=20, p=0.05)$. Se pide $P(X>3)=1-P(X\leq 2)=1-0.924516=0.075484$. También se pide $P(X=0)=0.95^{20}=0.358486$.
2.24.(b) La probabilidad que se pide es $P(X>2)=1-P(X\leq 1)=1-0.73584=0.26416$, ya que el 10 % de 20 es 2. Sea $p'=$la probabilidad de que un paquete cumpla la garantía$=1-0.26416=0.73584$.
2.24.(c) $Y=$"número de paquetes que cumplen la garantía de la caja de 25"$\sim B(n=25, p')$. Se pide $P(Y>20)=P(Y=21)+\cdots+P(Y=25)=0.17063$.
2.25.(a) $X=$"número de enfermos"$\sim B(n=20, p=0.01)$. Se pide $P(X=0)=(1-p)^{20}=0.99^{20}=0.81791$.
2.25.(b) Buscamos n tal que $(1-p)^n\leq 0.01$. Tomando logaritmos, $n\log(1-p)\leq\log(0.01)$ o, despejando n, $n\geq\frac{\log(0.01)}{\log(0.99)}=458.21058$, esto es, $n\geq 459$.
2.26.(a) $X=$"cantidad de bebida en un vaso"$\sim N(\mu,\sigma^2)$, con $\mu=200$ y $\sigma=15$. Se pide $P(X>224)=P(Z>\frac{224-200}{15})=P(Z>1.6)=1-0.94520=0.05480$: un 5.48 %.
2.26.(b) $P(191<X<209)=P(\frac{191-200}{15}<Z<\frac{209-200}{15})=P(-0.6<Z<0.6)=0.72575-(1-0.72575)=0.45150$
2.26.(c) Sea p la probabilidad de que al llenar un vaso de 230 ml. el vaso rebose, esto es,

$$p=P(X>230)=P(Z>\frac{230-200}{15})=P(Z>2)=1-0.97725=0.02275\,.$$

Sea $Y=$"número de vasos que rebosan de los 1000"$\sim B(n=1000, p=0.02275)$. Aproximaremos la probabilidad que nos piden, que es $P(Y<25)=P(Y\leq 24)$, usando la aproximación de la binomial por la normal con la corrección de Yates (es posible pues $n\,p=22.75\geq 5$ y $n\,(1-p)=977.25\geq 5$). Entonces, esta probabilidad es aproximadamente

$$P(Z\leq\frac{24+0.5-n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}})\cong P(Z\leq 0.37)=0.64431$$

2.26.(d) Buscamos un nivel de volumen, digamos ℓ, tal que $P(X\leq\ell)\geq 0.25$. Estandarizando, tenemos que $P(Z\leq\frac{\ell-200}{15})\geq 0.25$, lo que nos lleva, utilizando la tabla de la normal, a que $\frac{\ell-200}{15}\geq -0.67$ y, despejando, $\ell\geq 200-0.67\times 15=189.95$ ml.

2.27. $X =$"tiempo de vida del motor"$\sim Exp(\lambda)$, con $\lambda = 1/10 = 0.1$. Buscamos x tal que $P(X \leq x) \leq 0.03$, luego tal que $1 - e^{-0.1\,x} \leq 0.03$. Esto equivale a $e^{-0.1\,x} \geq 1 - 0.03 = 0.97$ y, tomando logaritmos naturales, $-0.1\,x \geq \ln(0.97)$. Despejando x obtenemos finalmente, $x \leq -10\,\ln(0.97) = 0.30459$ meses (aprox. 9 días).

2.28. $X =$"tiempo de vida de la mosca adulta"$\sim Exp(\lambda)$ con $\lambda = 1/20 = 0.05$. Nos piden $P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25) = 1 - (1 - e^{-0.05\times 25}) = e^{-0.05\times 25} = e^{-1.25} = 0.28650$